不思議の国のトムキンスツアー　シーズン１　プロローグ

真崎隆平　著

2025 年 2 月 15 日

特殊相対性理論の世界をご紹介する前に、必要な前提となる考えをご説明します。

１．運動についての考え方の歴史。

（１）今から２０００年前のギリシャの哲学者アリストテレスの考え方

物体に力を加えるとその物体は力に比例した速さで運動し、力を加えるのを止めると
物体は停止する。
この考え方は、皆さんがいつも見慣れていることに合っていますので、
アリストテレスの運動についての考えは、１６世紀まで１６００年間の
長い間、運動に対しての正しい法則だと信じられていました。

（２）今から４００年前のイタリアの科学者ガリレオの考え方

①　慣性の法則と慣性系

ガリレオは運動について深く考え、実験を重ねてアリストテレスの考え方が
間違いであることを次のように説明しています。
床に重い箱を置いて動かし、手を離すとすぐに止まる。アリストテレスの考え方が
正しいように見えるが、床に玉を置いて動かし、手を離してもなかなか止まらない。
同じ力で押してもすぐ止まるのとなかなか止まらないのがあると言うことは
床から物体の動きを止める力が働いて止まってしまうのであって、
物体自体は床からの止める力が無いときは、同じ速さで動き続ける。
物体は力が働かない限り、静止するか等速直線運動をする。
これを慣性の法則と言い、これが成り立つ系を慣性系と呼びます。
例えば、電車の中の人は、最初に動き出してしばらくは進行方向の
逆向きに押される力を感じます。この間は、電車の中の系は慣性系ではありません
そのうち、引っ張る力がなくなります。この間は、電車の中の系は慣性系です。
そして、止まるときには進行方向の向きに押される力を感じます。この間は、
電車の中の系は慣性系ではありません。

②　ガリレイの相対性原理

ガリレオはコペルニクスの地動説を支持して、宗教裁判で有罪とされ
「それでも地球は動く」と言ったと言われています。

「地球は球体で、太陽が中心に在りその周りを地球と惑星が回っている」と言う
地動説は、その頃とんでもない考え方だとされていました。
地球が動いていたら私達は地球に取り残されてしまう。
球体だったら下にいる人は落ちてしまう。こんな批判がされていました。
ガリレオはこの様な考え方に反論して、次のように説明しています。
静止している船のマストの上から鉄球を落としたらマストの真下に落ちます。
では、一定の速さでまっすぐ動いている船のマストの上から鉄球を補落としたら
何処に落ちるでしょうか。実験すれば分かりますが、鉄球は静止しているときと
同じようにマストの真下に落ちます。つまり、静止している船でも、一定の速さで
まっすぐ動いている船でも船の上の人が見たとき鉄球の運動に違いはありません。
地上にAさんがいて、船の上にBさんがいるとします。
船が静止しているときにマストの上から鉄球を落とすと、AさんもBさんも鉄球は
マストの真下に向かって真っ直ぐ落ちます。
船が一定の速さで真っ直ぐ動いている時、Bさんは船が静止しているときと同じ様に
鉄球はマストの真下に向かってまっすぐ落ちます。
Aさんは鉄球が船と同じ速さで真っ直ぐ動きながら落ちる為、
曲線を描くのを見ますが、やはりマストの真下に落ちるのを見ます。
静止しているか、等速直線運動をしている慣性系の間では
運動に違いは無く、区別できないという原理をガリレイの相対性原理と言います。

ガリレオはこの他にも、振り子の揺れるのを見て１回の振り子の往復に掛かる時間が
同じであると言う「振り子の等時性」を発見し、短い時間を正しく計ることが
出来るようになりました。自作の望遠鏡で、木星に衛星があること、
太陽の黒点、月のクレーターなども発見しています。
人の言葉を聞くだけでなく、自分で試してみて（実験）、自分で深く考える（考察）
事の大切さと、客観的な数値で他の人が実験して同じ結果を確認できることの
大事さを説き、近代科学の基礎を作った偉大な人です。

２．空間と時間についての考え方の歴史。

（1）待ち合わせ

待ち合わせで、青少年科学館３階会議室に２０２５年5月３１日午後２時
に集合してください。と伝えられたら皆さん間違いなく集まれますか？
大丈夫ですね。待ち合わせで必要なのは場所と時刻ですよね。
場所とは何でしょう。青少年科学館に一度も来たことのない人は、どうして
来れば良いのでしょう。

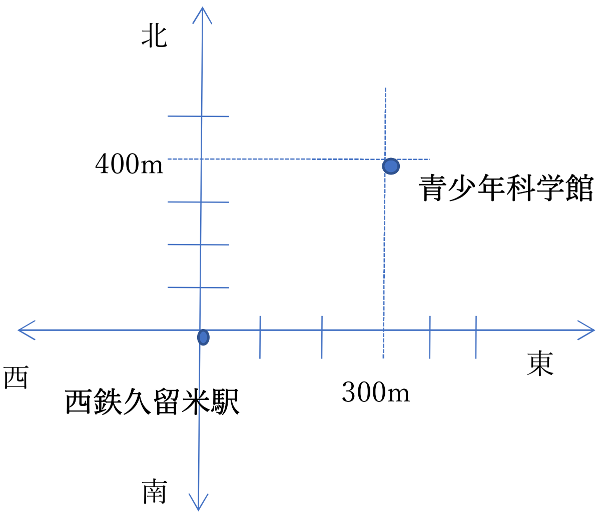
住所を調べ、地図を見ながら来る。スマホのマップで住所を入れて経路案内。
など、住所で地上の位置を決めて、３階でその建物の高さを決めています。
では、時刻の午後２時はどうしたら分かりますか。時計を見れば分かります。
日本では統一された時刻を使っていますので、時計が狂ってない限り同じ時刻に集まれます。

（２）座標の誕生。

場所を示すのに、住所を決める事は昔から使われていました。
でも、位置を決めるのに座標という考えを科学的に用いたのは、ガリレオと同時代の哲学者デカルトです。「我思う、故に我在り」と言う言葉で有名です。
デカルトは物事を全て疑うことから始めました。しかし、疑っている自分がいる事は否定できないので、自分はいるのだと気付いたのです。
それまでの数学は、ユークリッドの幾何学と、数の四則演算を基礎とする代数学が全く別の物として扱われていました。定規とコンパスを使って図形的に証明するこの幾何学を、代数学の数式を使って表現し、証明できる為にデカルトが生み出したのが、座標という考え方でした。

（３）座標とは何か。

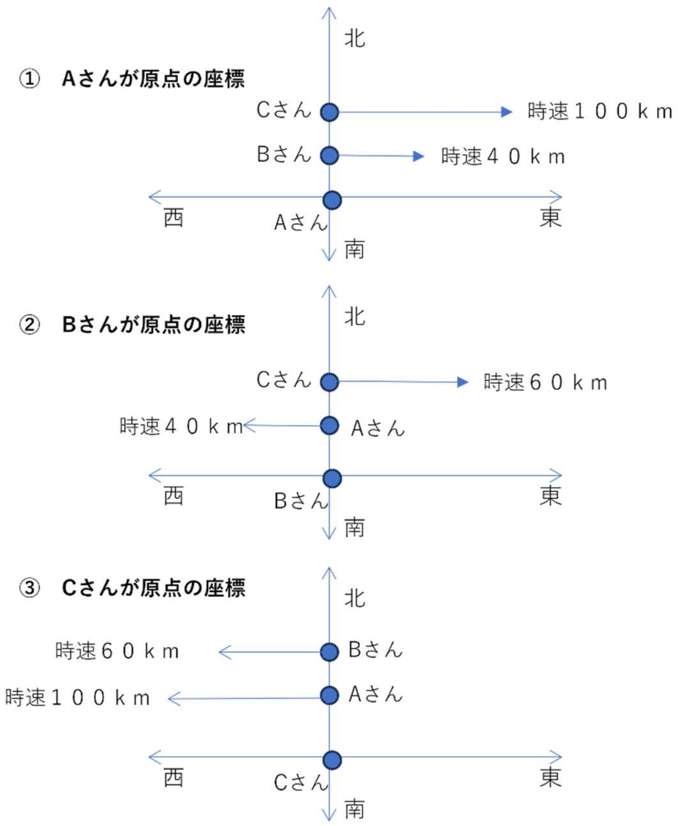
座標によって場所を表してみましょう。今、私は西鉄久留米駅に降りました。
今いる場所を起点に、青少年科学館の場所を表すのにはどうすれば良いでしょう。
紙の上に、起点を書き、そこから横線で右が東、左が西の線を引きます。
次に、起点から縦線で上が北、下が南の線を引きます。そして各線の区切りを１００ｍにして、区切りの線を書きます。青少年科学館が西鉄久留米駅から東に３００ｍ北に４００ｍの所にあるとすると座標上の点が左図のように決まります。



この様にして、座標によって場所を示すことが出来るのが分かります。
でも、起点をJR久留米駅に変えたら青少年科学館は東に１５００ｍ、北に３００ｍと座標の値は変わります。
青少年科学館の在る場所が実際に変わるわけではなく、座標での値が変わるのです。もっと分かりやすく言うと、右端の前の方と左端の後ろの方から私を見る人とでは、わたしの位置は距離も方向も違いますよね。

即ち、座標とは人が任意に付けた起点と東西、南北の距離により実体の位置を記した物だと言えます。座標の取り方は無限にあると言うことです。

次に、地上に立っているＡさん、東に時速４０ｋｍの一定の速さで動いている車を運転しているＢさん、東に時速１００ｋｍの一定の速さで動いている電車に乗っているＣさんの３人を考えます。
３人がそれぞれ、自分がいる所を原点とした座標で見たときの図です。

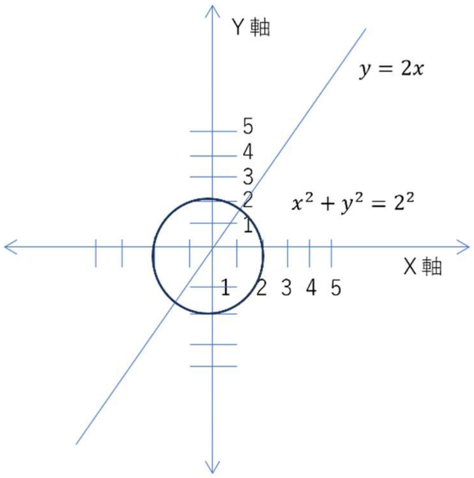


①ではＡさんから見たとき
②ではＢさんから見たとき
③ではＣさんから見たとき
の相手の動く速さがどの様に見えるかを示しています。
この３つの座標は全て外部から力が働いていないので、慣性の法則が成立している座標なので全てが慣性系だと言えます。
Ａさんが自分は静止していると主張するのも、
Ｂさんが自分は静止していると主張するのも、
Ｃさんが自分は静止していると主張するのも、
運動の法則は同じように成り立ちますので、すべて、相対的に同等だと言えます。

これが、ガリレイの相対性原理です。私達は、地上は静止していると言う事を当たり前だと感じています。ですから、大谷選手の球の速さが時速１５０ｋｍと言うときは地上に対する速さとわざわざ言う必要も無いのです。でも、宇宙空間でロケットに乗っている時、ロケットの速さを秒速２０ｋｍにしてくださいと言われたら、あなたは必ず聞くはずです。どの星に対して秒速２０ｋｍにすれば良いのですかと。自分の絶対的な速さは分かりません、分かるのは、ある物に対しての相対的な速さだけなのです。

（4）デカルト座標

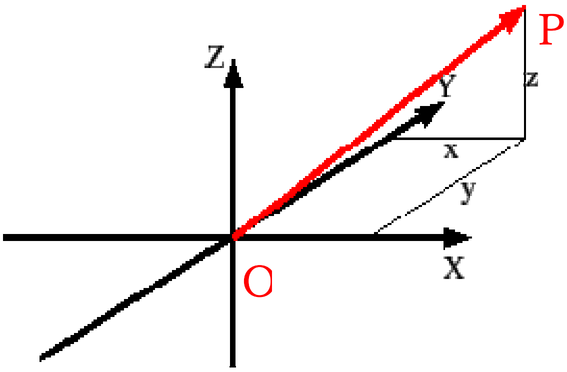
デカルトは３次元空間を直交する３本の直線を座標の軸とする
３次元直交座標を考えました。これをデカルト座標と呼び、x軸、y軸、z軸
の値により物体の位置やその運動を示す事が出来ます。
また、幾何学の直線や円の実体を座標上の点の集合と見ることにより、幾何学を
代数学に結びつける事が出来るようになりました。
例として、直線　y=2x と半径２の円　$x^2 + y^2 = 2^2$　を座標上で表示しています。



半径２の円と直線 y=2x の交わる点は、$x^2 + y^2 = 2^2$　式の y に y=2x を代入して、$x^2 + (2x)^2 = 2^2$
$5x^2 = 4$　より

$x = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$　$y = \pm\frac{4\sqrt{5}}{5}$

と代数学により、交点が座標の値で分かり、幾何学の問題を代数学で解くことが出来るようになりました。



３次元空間をデカルト座標で表し、物体の運動をどの様に座標で捉えるかを説明します。
物体を質量はあるが、大きさの無い点として考えます。これを質点と呼びます。
すると、物体の位置が点 P に在るとき、原点 O を始点としてその物体の座標上の位置$P(x, y, z)$　が決まります。この時、
原点 O から物体の位置点 P に線 OP を引きます。原点 O からの物体点 P までの
距離だけでは位置が特定できませんので、方向も考え、原点 O から見た物体点 P の
方向に矢印を付けます。この様に、大きさと方向を持つ物をベクトルと呼びます。
この場合は原点 O からの物体点 P の位置を表すベクトルとなりますので、
位置ベクトルと呼び、$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = \vec{r}\ (x, y, z)$ の様に、上に矢印を付けて
ベクトルであることを示します。この様にして、デカルト座標によって
３次元の空間の位置を座標の値、又はベクトルとして表示できるようになりました。

（5）時間とは何でしょうか

場所は、デカルト座標によって座標の成分表示、位置ベクトルでの表示が出来ました。
時間は、空間と違って行ったり来たり出来ません。集合時間が午後2時だったのに
遅れて午後3時に来たとき、1時間戻れば大丈夫というわけには行きません。
空間は行き過ぎたときは戻れるのに時間はどうして立ち止まったり、戻ったり出来ないのでしょうか。この答えは分かっていません。
ガリレオ・ガリレイは時間と空間は全く別の物で、全ての空間で時間は全く同じに
流れているとしました。ニュートンも同じように時間を考えています。

（6）ニュートンの出現

ガリレオ・ガリレイの慣性の法則、相対性原理そして、デカルトによる座標の発見を
総合的にまとめ上げ、運動に対して、微分の考え方を取り入れた運動法則を
見出したのがアイザック・ニュートンです。イギリスの人で、哲学者、数学者、
物理学者、天文学者、神学者でした。近代科学だけでなく、産業の基本である
建設、機械、宇宙などの、現代まで続く工学の基礎を築いた偉大な人です。
現在「ニュートン力学」とも称されるニュートンの運動法則を元に発展した古典力学や微分法を創始しています。また、物質にはたらく力として万有引力の考え方を提唱し、これらは、天文学や力学において科学の基本理論として現在も使われています。

（7）ニュートンの運動法則

① 第1法則　慣性の法則

物体に外部から力が作用しない場合、静止する物体は静止し続け、運動している
物体は一定速度で運動し続ける。
慣性の法則が成立している座標系を慣性系と呼びます。

② 第2法則　運動方程式

質量mの物体に大きさ$\vec{F}$の力が働くとき、加速度$\vec{a}$が生じている。

$m\vec{a} = \vec{F}$　運動方程式

質量の単位はkg　加速度の単位は m/s^2
力の単位は N (ニュートンと呼びます)　 1N=1kgm/s^2
質量と加速度の積で、力が決められています。

③ 第3法則　作用反作用の法則

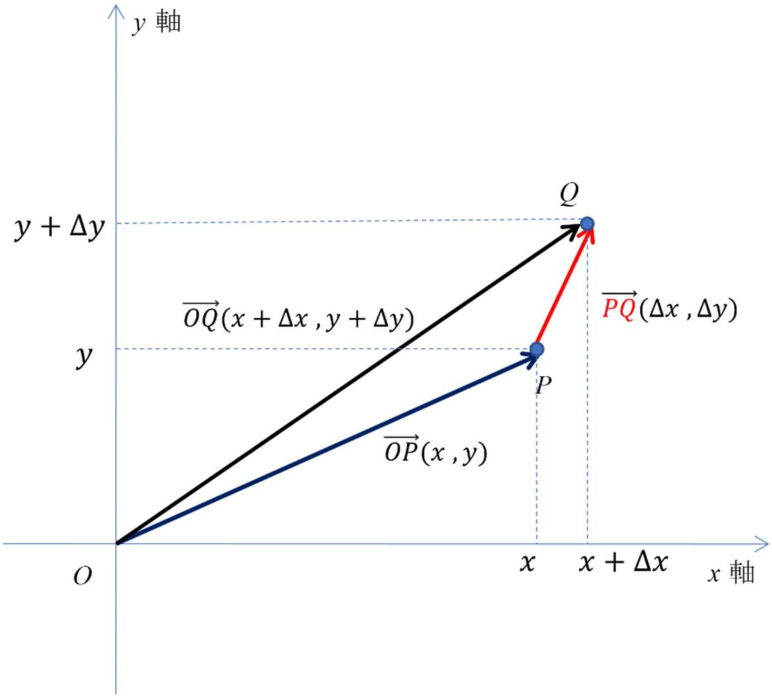
物体が他の物体に力を及ぼすとき、その物体は同じ大きさの反対向きの力を
他方の物体から受けている。

第1法則は慣性系が存在することを言っています。第2法則と第3法則は
慣性系の存在を前提としているため、第1法則が慣性の法則になっています。

（8）ニュートンの運動方程式についての考察

①　位置ベクトルと変位ベクトルについて

分かりやすいように2次元のデカルト座標で考えます。



原点 O から P の位置を示す位置ベクトルは　$\overrightarrow{OP}(x,y)$ と書けます。
原点 O から Q の位置を示す位置ベクトルは　$\overrightarrow{OQ}(x+\Delta x,y+\Delta y)$ と書けます。
P の位置から、Qの位置に行くのには、x 軸方向に Δx、 y 軸方向に Δy
行けば良いので、P を始点としたベクトル　$\overrightarrow{PQ}(\Delta x,\Delta y)$　を考えます。
位置の変化をベクトルで表しているので、変位ベクトルと呼びます。この時

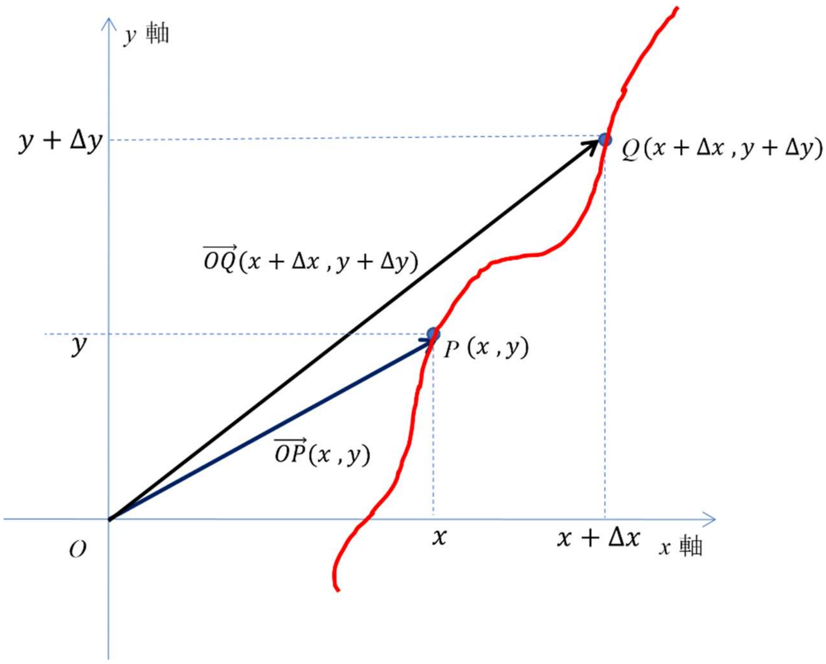
$$\overrightarrow{OP}(x,y)+\ \overrightarrow{PQ}(\Delta x,\Delta y)=\ \overrightarrow{OQ}(x+\Delta x,y+\Delta y)$$ が成り立ちます。

これをベクトルの加法性と呼び、ベクトルの成分同士も加法性が成り立ちます。
ベクトルの加法性は成分表示の単位が同種でないと意味が無いので注意して下さい。

②　速さと速度について

次に、3次元デカルト座標によって3次元の位置ベクトルを
$\overrightarrow{OP}=\ \vec{r}=\vec{r}\ (x,y,z)$　の様に表すことが出来ます。
今、S 系の慣性系を考えます。質点 M の位置が、時刻 t に $P(x,y,z)$ の位置
に在ったとします。質点 M は時刻の変化によりその位置が変化します。
従って、その成分 (x,y,z) も時刻の変化により変化します。つまり、

時刻 ｔ によって、x, y, z の値を $x(t),\ y(t),\ z(t)$ と書けますので、
点 $P(x(t),\ y(t),\ z(t))$ と書けます。時刻 ｔ よりほんの少しの時間 Δｔ が経って
時刻 ｔ＋Δｔ に質点Ｍの位置が点Ｑ$(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ に移ったとします。
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ は点Ｐから見て点Ｑがどれだけ動いたかを示しています。
この時、点Ｑ$(x(t+\Delta t),\ y(t+\Delta t),\ z(t+\Delta t))$ と書くことが出来ます。
ニュートンは運動とは、物の位置がどの様に時間と共に変化するかと言う事から速度という物を考えました。ここで、速度という言葉と速さと言う言葉の違いをきちんと理解しましょう。速さは、時速１５０ｋｍとか秒速２０ｋｍとか大きさだけで表します。では、現実の物の動きは速さだけで表せますか？
時速１５０ｋｍと言ってもどの方向に走っているか言わないと決まりませんよね。
速度とは速さと方向の両方を持ったもので、これで現実の物の動きをきちんと表せます。この様に、速さと方向の両方を持った物を速度と呼びます。
ですから、速度はベクトルになります。



今、平面上を物体Ｍが時間と共に動いていて時刻 t に点 $P(x, y)$ の位置から時間 Δｔ が経って、時刻 ｔ＋Δｔ に質点Ｍの位置が点Ｑ$(x+\Delta x, y+\Delta y)$ に移ったとします。赤い線に沿って物体Ｍが動いたとするとこの点Ｐから点Ｑまでの赤い線の距離を時間 Δｔで割ると平均の速さが求められます。道筋は曲がったりして速さも早くなったり遅くなったりしています。でも、時間 Δｔをドンドン小さく取っていくと点Ｐと点Ｑの距離もドンドン小さくなります。
この極限では時刻 t での点 $P(x, y)$での物体Ｍの瞬間の速度 $\vec{v}(t)$ が求められるとニュートンは考えました。

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OQ}(x+\Delta x, y+\Delta y) - \overrightarrow{OP}(x,y)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OQ}\big(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t)\big) - \overrightarrow{OP}\big(x(t), y(t)\big)}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{PQ}(x(t+\Delta t) - x(t)\,,\ y(t+\Delta t) - \ y(t))}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{PQ} \left(\frac{\Delta x(t)}{\Delta t}\ , \frac{\Delta y\,(t)}{\Delta t} \right)$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

ここで、$\Delta \vec{r}(t)$ は時間 Δt での、位置ベクトルの変化$\overrightarrow{PQ}$を示しています。

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt} \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \frac{dy(t)}{dt} \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

と書くことにします。これがニュートンの微分の考え方で、位置ベクトル $\vec{r}(t)$ を時間 t で微分したものが速度ベクトルと言います。

$$\vec{v}(t) = \vec{v}\left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt} \right) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

と書くことが出来ます。３次元ユークリッド空間でも同じようにして、速度$\vec{v}(t)$ は

$$\vec{v}(t) = \vec{v}\left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right)$$ と書け、$$\left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right) = \left(v_x\ ,\ v_y\ ,\ v_z\right)$$

とすると、$\vec{v}(t) = \vec{v}\left(v_x\ ,\ v_y\ ,\ v_z\right)$ となります。$\vec{v}$ の大きさが速さになりますので、速さ $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ で計算できます。

③ 加速度について

速度も時間と共に変化します。速度はベクトルなので大きさと方向があります。
ですから、大きさ（速さ）が変わっても、方向が変わっても変化したと言えます。
この速度の時間変化を加速度と呼び $\vec{\alpha}(t)$ と書きます。加速度もベクトルです。

$$\vec{\alpha}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}\Big(v_x(t+\Delta t),\ v_y(t+\Delta t),\ v_z(t+\Delta t)\Big) - \vec{v}\Big(v_x(t),\ v_y(t),\ v_z(t)\Big)}{\Delta t}$$

ここで、

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} = \frac{dv_x(t)}{dt} \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_y(t+\Delta t) - \ v_y(t)}{\Delta t} = \frac{d\ v_y(t)}{dt}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_z(t+\Delta t) - v_z(t)}{\Delta t} = \frac{dv_z(t)}{dt}$$

と書くとこにします。すると、

$$\vec{\alpha}(t) \ = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right) \ = \ \vec{\alpha}\left(\frac{dv_x(t)}{dt}, \frac{d\,v_y(t)}{dt}\ , \frac{dv_z(t)}{dt}\right)$$

$$= \ \vec{\alpha}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right), \frac{d}{dt}\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)\ , \frac{d}{dt}\left(\frac{dz(t)}{dt}\right)\right)$$

と書けます。

加速度ベクトルは位置ベクトルを時間 t で微分した、速度ベクトルを

もう 1 度、時間 t で微分したしたものと言えます。これを、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{dy(t)}{dt}\right) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{dz(t)}{dt}\right) = \frac{d^2z(t)}{dt^2}$$

と書いて、位置ベクトル $\vec{r}(t)$ の時間 t での 2 階微分と呼びます。

④　ニュートンの運動方程式

ニュートンは、物体は力が加えられれば、物体の速度は変化する。

そして、加えた力と速度の変化は比例すると言う事に気付きました。

そして、比例係数が物体の質量を表すと考えました。式で書くと

第 2 法則　運動方程式

質量mの物体に大きさ$\vec{F}$の力が働くとき、加速度$\vec{\alpha}$が生じている。

$m\vec{\alpha} = \vec{F}$　運動方程式

質量の単位はkg　加速度の単位は m/s^2

力の単位は N (ニュートンと呼びます)　 1N=1kgm/s^2

質量と加速度の積で、力が決められています。

となります。

例えば自動車でアクセルを踏んで真っ直ぐ進むと速さが大きくなります。

ハンドルを回すと回した方向に方向が変わります。どちらも速度は変化しています。

力は大きさだけでなく方向も持っています。ボールの真上から地面に向かって

力を加えてもボールは動きません。地面と平行に加えると動きます。

そのほか、力の釣り合いなど考えると力はベクトルと考えられます。

質量は大きさだけですのでベクトルではありません。

不思議の国のトムキンスツアー　シーズン１　本篇

真﨑隆平　著

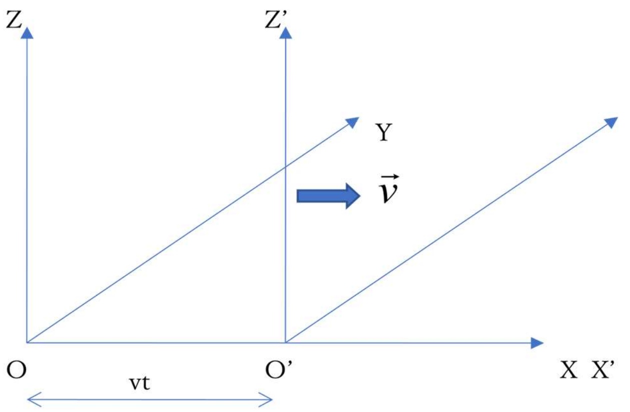
2025 年 2 月 28 日

特殊相対性理論の世界（時間と空間が混ざり合う不思議な世界）

１．ニュートンの運動法則

①　慣性の法則　　　②　運動の法則　　③　作用反作用の法則

（例）慣性系 S（ｘ, ｙ, ｚ, ｔ）と、X 方向に一定の速さ V で動く別の
慣性系 S‘（x’ , y’ , z’ , t’）があるとします。時刻 0 には O と O’は同じ所に
あったとします。私達は、直感的に次のような式が成り立つと考えます。
t’=t　, x’=x-vt　, y’=y　,z’=z
なぜなら、時間はどちらも同じように流れていくと考えているからです。
この様な変換をガリレイ変換と呼びます。



（図１－１）

ニュートンの運動法則は F ＝ｍα で、α は加速度です。
例では、x 方向と x ‘方向が速度 v で動いているので違いますが、加速度

$\alpha = \frac{d^2x}{dt^2}$　を考えると、

$$O\text{ 系}\quad m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \ , m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y \ , m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z$$

$$O'\text{ 系}\quad m\frac{d^2x'}{dt^2} = F_x \ , m\frac{d^2y'}{dt^2} = F_y \ , m\frac{d^2z'}{dt^2} = F_z$$

となり、ニュートンの運動法則はガリレイ変換では変わらないことが示されます。

２．マックスウェルの電磁気に関する方程式

ニュートンの運動方程式は、古典力学と呼ばれ完成された間違いのないものとして
人々の常識的な考えになっていきました。
マックスウェルは、それまでの電気や磁気の法則をまとめました。そして
電磁波という波が発生することを示したのです。この波の伝わる速さが
光の速さと一致したため光は電磁波の一種であることが分かりました。
マックスウェルの電磁場の方程式は以下のように書かれます。

$rot\,\vec{E}+\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$（ファラデーの法則）

$rot\,\vec{H}-\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\vec{J}$（アンペールの法則）

$div\,\vec{D}=\rho$（電場のガウスの法則）

$div\,\vec{B}=0$（磁場のガウスの法則）

$\vec{B}=\mu_0\vec{H}\quad\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}$（$\mu_0$ は真空中の透磁率，ε_0は真空中の誘電率）

これらの式から、以下のような電場と磁場の組み合わさった波である電磁波の
発生が予測され、その速さが光の速さと一致したためマックスウェルは光もこの
電磁波の一種だと考えました。

$$\left(-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)\vec{E}=0\,,\left(-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)\vec{B}=0$$

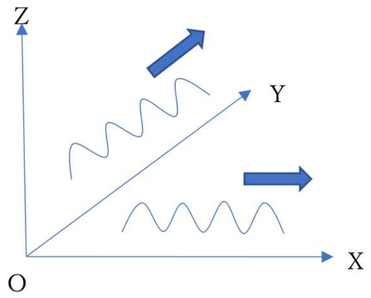
これが、電磁波の波動方程式です。式の内容は参考に出していますが、
記号とか沢山在り、分からなくても問題ありません。
ただ、この式から真空中で電磁波の伝わる速さが、ｃで一定の速さだと分かります。

$\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=c\cong 2.99\times10^8\ m/s$　約３０万km/s 光の速さ

これは本当に大事なことです。
では、この光の速さはどの慣性系で成り立っているのでしょうか。
私達は無意識に、速さというと自分の立っている地上からの速さを考えます。
時速３００ｋｍの速さの新幹線と言いますが、同じ方向に時速１００ｋｍで走っている
車に乗っている人から見たら時速２００ｋｍの速さの新幹線だと言うでしょう。
では、この光の速さは、どの座標から見ての速さなのでしょうか。
これに対して、当時の科学者は

① エーテルという物が真空を満たしている。
② このエーテルが静止している系が絶対静止座標でこの系での光の速さがｃである。

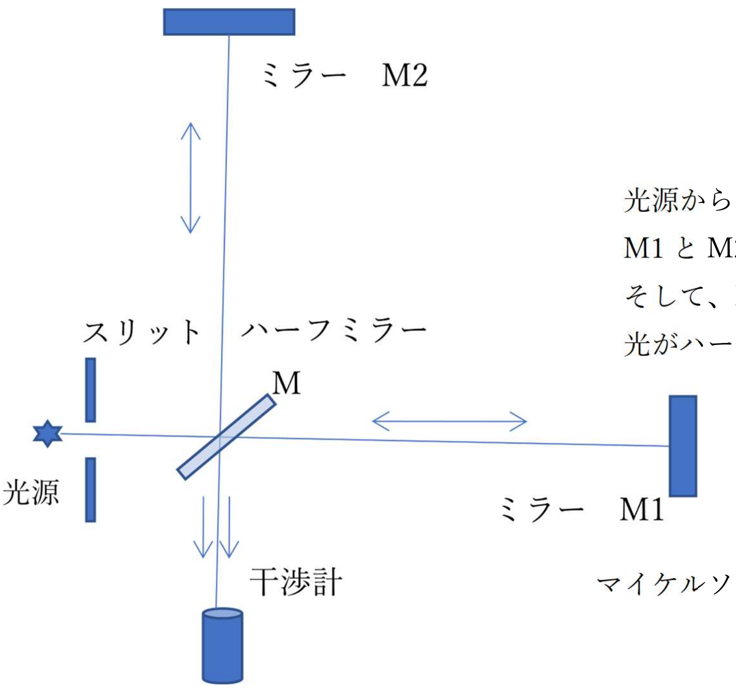
と考えて、実験でこのエーテルの動きを調べることになりました。
１８８７年にマイケルソンとモーレーという２人の科学者がこの実験を行いました。
私達の地球はこのエーテルの中を動いているので、最初にある方向で光の速さを測定しその後、９０度回転させて最初と直角な方向での光の速さを測定しその速さのずれを見ればエーテルの絶対静止座標が導けると考えました。



X 方向と Y 方向ではエーテルに対して速さが違うため、光の速さは X 方向と Y 方向では違うはず

（図２－１）

光の速さは秒速３０万ｋｍと非常に速いので、速さの違いを測定するのはすごく難しい事です。2 人は波の干渉を利用して 2 つの光路の時間差をはかる装置を作り実験を行いました。



光路 L1
光源→M1→M→干渉計
光路 L2
光源→M2→M→干渉計
光源からの光はハーフミラーM で M1 と M2 の方向に分けられる
そして、M1 と M2 で反射してきた光がハーフミラーM により干渉計に入っていく。

（図２－２）
マイケルソン・モーレーの実験装置

実験はまず、図の形で測定し、次にハーフミラーM を中心に９０度時計回りに装置全体を回転して測定します。ハーフミラーとは、一部の光が透過し、一部の光を反射するミラーのことを指します。この時の干渉の違いによりエーテルに対する速度を求めます。
この様にして実験した結果は予想外の結果でした。
何と、何度実験しても干渉は起こらず方向に関係なく光の速さは同じという結果でした。

３．アインシュタインの登場

これを解決したのがアインシュタインで、その理論は特殊相対性理論と呼ばれます。

（1）アインシュタインの特殊相対性原理

光速 c が一定で差異が見られないのを受け入れて、

光速はどの慣性系でも同じ c で一定だとし、

① 全ての物理法則はどの慣性系でも同じ形になる。(物理法則不変の原理)

② 真空中の光速は光源の運動状態に依らず一定である（光速不変の原理)。

この２つの原理を満たす慣性系の間の座標変換を見出しました。

この座標変換はローレンツ変換と言われます。

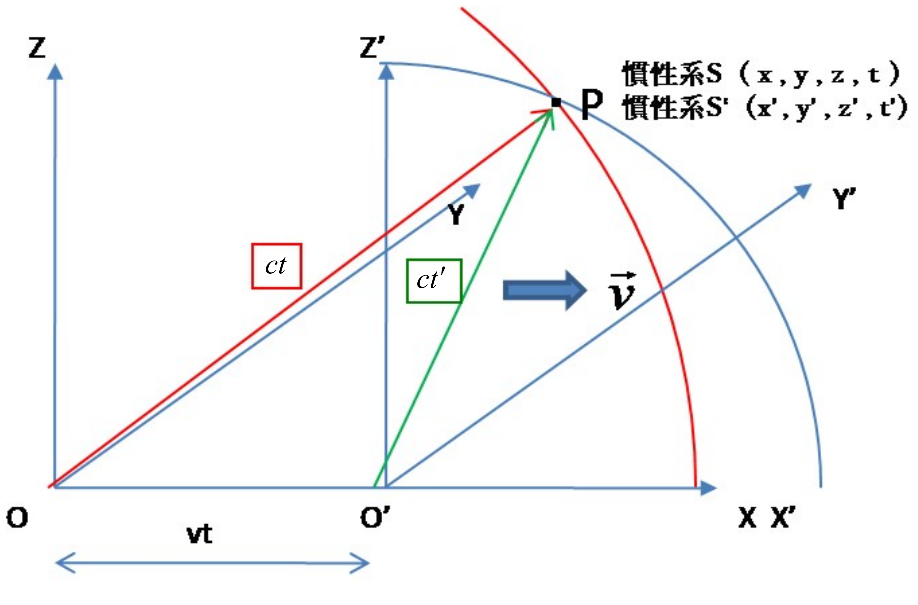
（ガリレイ変換は光速不変の原理を満たしていません）

アインシュタインの発見した変換ですが、ローレンツと言う人が間違った仮説のもとに同じ変換を先に考え出していたのでアインシュタイン変換ではなく

ローレンツ変換と呼ばれる様になりました。

（2）ローレンツ変換の導き方

光速不変の原理を満たす、慣性系の間の座標変換を導き出します。



（図３－１）

慣性系 S と X 方向に一定の速さ V で動く別の慣性系 S'（x' , y' , z' , t'）

があり、時刻 0 には O と O'は同じ所にあるとします。

時刻 t=t'=0 に O に固定した光源から光が放たれたとすると、

時刻 t=t'=0 には O と O'は同じ所にあったので、この光は O'に固定した

光源から光が放たれたとしても同じ事になります。光速不変の原理から、
この光はＳ系で見てもＳ‘系で見ても全ての方向に速度ｃで広がります。
ある点Ｐに光の波面が到達した状況を考えます。この点の位置をＳ系では（x, y, z）、Ｓ‘系では（x', y', z'）と表されるとし、到達した時刻はＳ系ではｔ
Ｓ‘系ではｔ’とします。
Ｓ系ではＰを通る半径ｃｔの球面が、光の波面だと観測します。
Ｓ‘系ではＰを通る半径ｃｔ’の球面が、光の波面だと観測します。

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2 \qquad （３－１）$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2 \qquad （３－２）$$

の２式は同時に成り立っています。
Ｓ系からＳ‘系への座標変換をした場合も、この２式は成り立っている必要があります。
今、y=y’で、z=z’なので、

$$x^2 - (ct)^2 = x'^2 - (ct')^2 \qquad （３－３）$$

が成立します。
Ｓ系もＳ‘系も慣性系の間の変換なので、等速直線運動は変換でも等速直線運動となります。
等速直線運動は一次式で書かれますので、この座標変換は一次変換となります。
今、y=y’で、z=z’なので、x’とｔ’の変換は

$$x' = ax + bt \qquad （３－４）$$

$$t' = dx + et \qquad （３－５）$$

と、一次変換の形で書くことが出来ます。
Ｓ’系の原点Ｏ’を、Ｓ’系から見た時、任意の時刻ｔ‘でｘ’=0であり
Ｓ系から見た時、時刻ｔでは　ｘ＝Ｖｔ　となりますので、
$x' = ax + bt$　（３－４）の式に　ｘ’=0とｘ＝Ｖｔ　を代入して
$0 = aVt + bt = (aV + b)t$　より　$b = -aV$　（３－６）
が成立します。
次に、（３－４）のｘ‘と（３－５）のｔ’を　$x^2 - (ct)^2 = x'^2 - (ct')^2$（３－３）に代入して

$$x'^2 - c^2 t'^2 = (ax + bt)^2 - c^2 (dx + et)^2$$

$$= (a^2 - c^2 d^2)\, x^2 + (b^2 - c^2 e^2)\, t^2 + 2(ab - c^2 de)\, xt = x^2 - c^2 t^2$$

この式より、以下の式が成り立たなくてはならない。

$$a^2 - c^2 d^2 = 1 \qquad （３－７）$$

$$b^2 - c^2 e^2 = -c^2 \qquad （３－８）$$

$$ab - c^2 de = 0 \qquad （３－９）$$

この３式に　$b = -aV$　（３－６）式を加えた４つの式から a, b, d, e の値を導きます。
先ず、（３－６）式のｂを（３－７）（３－８）（３－９）に代入して b を消去します。

$$a^2 - c^2 d^2 = 1 \qquad （３－１０）$$

$$a^2 V^2 - c^2 e^2 = -c^2 \qquad （３－１１）$$

$$-a^2 V - c^2 de = 0 \qquad （３－１２）$$

（３－１０）式を変形して、$a^2 = 1 + c^2d^2$　とし（３－１１）と（３－１２）式に代入して a を消去します。

$(1+c^2d^2)V^2 - c^2e^2 = -c^2$　　　（３－１３）

$-(1+c^2d^2)V - c^2de = 0$　　　（３－１４）

（３－１４）式を変形し

$e = -\dfrac{(1+c^2d^2)V}{c^2d}$　　（３－１５）として（３－１３）に代入

$$(1+c^2d^2)V^2 - c^2\left(-\frac{(1+c^2d^2)V}{c^2d}\right)^2 = -c^2$$

変形して

$$(1+c^2d^2)V^2 + c^2 = c^2\left(\frac{(1+c^2d^2)^2V^2}{c^4d^2}\right)$$

変形して

$$(V^2 + c^2d^2V^2 + c^2)c^2d^2 = (1+2c^2d^2 + c^4d^4)V^2$$

$c^2d^2V^2 + c^4d^2 = V^2 + 2c^2d^2V^2$ から $(c^2 - V^2)d^2 = (V/c)^2$　　d^2で括ると

$$d^2 = \frac{(V/c)^2}{c^2 - V^2} = \frac{(V/c)^2}{c^2(1-(V/c)^2)}$$　（３－１６）

ここで　$(V/c) = \beta$と置いて d を求めると　（３－１７）

$d = \pm\dfrac{(\beta/c)}{\sqrt{1-\beta^2}}$　　（３－１８）で、d　が求まります。

$e = -\dfrac{(1+c^2d^2)V}{c^2d}$　　（３－１５）式に（３－１８）で求めた d を代入して

$$e = -\left(\frac{1}{c^2d} + d\right)V = -\left(\frac{1}{c^2}\left(\pm\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta/c}\right) + \left(\pm\frac{(\beta/c)}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\right)V = -V\left(\pm\frac{(1-\beta^2) + c^2(\beta/c)^2}{c^2(\beta/c)\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

$$= -V\left(\pm\frac{1-\beta^2+\beta^2}{V\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \mp\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$　（３－１９）で、e が求まります。

次に、（３－８）式の　$b^2 - c^2e^2 = -c^2$　に（３－１９）で求めた e　を代入します。

$$b^2 = c^2(e^2 - 1) = c^2\left(\frac{1}{1-\beta^2} - 1\right) = \frac{c^2\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{V^2}{1-\beta^2}$$

$b = \mp\dfrac{V}{\sqrt{1-\beta^2}}$　　（３－２０）で、b　が求まります。

次に、（３－７）式の　$a^2-c^2d^2=1$　に（３－１８）で求めた　d を代入します。

$$a^2=1+c^2d^2=1+c^2\frac{\beta^2/c^2}{1-\beta^2}=\frac{1}{1-\beta^2}$$

$$a=\pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

（３－２１）　で、a が求まりました。

ここで、V → ０ の時　 x‘ → x　t’ → t　になることから

$x'=ax+bt$　（３－４）

$t'=dx+et$　（３－５）の式を見て、V → ０ の時　$a, e=1$　$b, d=0$

と成るはずです。これで、＋－の符号が決まり、最終的に

$$a=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\quad b=-\frac{V}{\sqrt{1-\beta^2}}\quad d=-\frac{\beta/c}{\sqrt{1-\beta^2}}\quad e=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ （３－２２）

と成りました。この値を（３－４）式と（３－５）式に入れて

$$x'=\frac{x-Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ （３－２３）　$$t'=\frac{-Vx/c^2+t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ （３－２４）

となります。ここで時間と空間が混ざり合う形となっています。

時間ｔと空間 x，ｙ，ｚは単位が違います。混ざり合う為には単位を合わせる必要があります。そこで、時間ｔに光速ｃを掛け合わせて、ct を考えると ct の単位は長さの単位になり、空間 x，ｙ，ｚと同じになり単位が合います。

$$\omega=ct\quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

と置き換えると $\beta=V/c$ なので、$Vt=\beta\omega$ となり

（３－２３）と（３－２４）は

$$x'=\gamma(x-\beta\,\omega)$$ （３－２５）

$$\omega'=ct'=\frac{-Vx/c+ct}{\sqrt{1-\beta^2}}=\gamma(\omega-\beta\,x)$$

（３－２６）ときれいな形になります。

これが、x方向での慣性系Ｓ系とＳ‘系のローレンツ変換です。

（3）ガリレイ変換とローレンツ変換の関係

ガリレオの時代からニュートンの時代で、古典力学と言われる理論が完成しました。この考えでは、空間と時間は全く違う物で、

空間は縦・横・高さの長さの単位を持つ３次元で表されるとします。

時間は秒・分・時など間隔を区切って決して過去（後ろ）には戻らず、

必ず未来（前へ）しか流れない物で一定の速さで流れていく物とされました。

あと、運動に関する理論でもガリレイ変換が当たり前の考え方になっていますし
実際の日常生活でも当たり前と思われます。
例えば、時速１００ｋｍで走っている電車の中で、大谷翔平選手が野球のボールを
時速１５０ｋｍで走っている方向に投げたとすると、これを電車の中で観ている人は
時速１５０ｋｍでボールは飛んでいくように見えます。
これを地上の人が観ていたら、ボールは電車が１００ｋｍで走っていてそこから
時速１５０ｋｍのボールが投げられたのですからボールの速さは
１００ｋｍ＋１５０ｋｍ＝２５０ｋｍの速さで見える。
これが普通の常識的な考え方ですし、実際に計ってみてもこの様になります。
ガリレイ変換とニュートンの力学は全く正確で完璧な理論だと思われ、
疑うことがない常識だと思われていました。
ところが、光速ｃを計って光の媒質と思われていたエーテルが静止している系
（絶対静止系）を突き止めようとする実験の結果は意外な物でした。
どの方向で計ってみても光速ｃの値は同一で、エーテルという媒質が静止している系は
無いという結果になりました。この時、天才アインシュタインが登場します。
彼はどの慣性系でも光の速さは一定ｃだと考え、エーテルや絶対静止系は存在しないと
見抜きました。ローレンツ変換は光速不変の原理と物理法則不変の原理の
２つの考えから導き出されています。
この理論の結果は、私達の今までの考え方を全く変えてしまいました。
コペルニクス的転換と言う言葉を知っていますか？
それまで、この大地が宇宙の中心に在り静止している。その周りを太陽や惑星や星が
回っているという考えが常識的な考えでした。もし、大地が動いているのなら
私達はどうして振り落とされないのか、大地が他の惑星のように球体ならなぜ
反対側にいる人は落ちてしまわないのか、などに答えられなかったのです。
でも、今では皆さんは地球が円いことを写真などで見て分かっていますよね。
そして、地球は特別な存在では無く太陽を回っている１つの惑星だと知っています。
まさに、アインシュタインの理論（特殊相対性理論）は、このコペルニクス的転換を
私達に与えたのです。
先ず、私達が待ち合わせで何時・何処でと決めると正確に伝わり、
誰もが同じ時間と場所を共有出来ると言うのが間違いで、同一事象でも座標系の違いで
違った時間と場所に見えます。
次に、光の速さを超える速さは無いと言うことで、例えば光の速さの電車の中で、
時速１５０ｋｍのボールを光の進む方向に投げたとすると、地上の人から見たら
ボールの速さは光の速さとなります。光の速さ＋１５０ｋｍ＝光の速さで見えるので
常識的な考え方の速さの足し算が成り立たなくなります。光の速さ＋光の速さ＝光の速さ
なのです。

では、ガリレイ変換は使えないのでしょうか？それを調べてみましょう。
ローレンツ変換の式

$$x' = -\frac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad （３－２３） \qquad t' = -\frac{-Vx/c^2 + t}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad （３－２４）$$

ここで、V が光速 c より非常に小さかったとします。
光の速さ秒速３０万ｋｍに比べると車や電車などはこれに当てはまります。

すると、$\beta = V/c$ や V/c^2 の値が０に近くなるため、

$x' = x - Vt$　　$t' = t$　となり、ガリレイ変換の式が成り立つようになります。
つまり、日常生活での動いている物の速さは光速に比べて非常に遅いので
ガリレイ変換の式が成り立っていると考えて良いのです。光速に近い速さの場合は
座標変換としてガリレイ変換ではなくローレンツ変換を使う必要が出てきます。

（4）速度の合成について

次に、光の速さを超える速さは無い。光の速さ＋光の速さ＝光の速さと
という点を調べてみましょう。
S’系では、以下のように x‘と t’が表されます。

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad （３－２３） \qquad t' = -\frac{-Vx/c^2 + t}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad （３－２４）$$

微小時間 Δ t’に進む微小距離 Δ x’から、S’系での速さ　$v' = \Delta x'/\Delta t'$　を計算すると

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - V\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \Delta t' = \frac{-V\Delta x/c^2 + \Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

と成ります。

ここで、$\Delta t'$と$\Delta x'$を０に近づけると、　ΔxとΔtも０に近づくので

$$v' = \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dfrac{\Delta x}{\Delta t} - V}{1 - \left(\dfrac{V}{c^2}\right)\dfrac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{v - V}{1 - \left(\dfrac{V}{c^2}\right)v} \qquad （３－２７）$$

ここで、Vが光速 c より非常に小さい時は、　V/c^2　は０に近くなるため
$v = v' + V$　となり、ガリレイ変換の式が導かれ、常識的な速度の合成が出来ます。
次に、ローレンツ変換での速度の合成について考えます。（３－２７）式より

$v' = \dfrac{c^2(v - V)}{c^2 - Vv}$　変形して　　$v'(c^2 - Vv) = c^2(v - V)$　この式をvでまとめて

$$v = \frac{c^2(v' + V)}{c^2 + Vv'} = \frac{v' + V}{1 + \left(\dfrac{V}{c^2}\right)v'}$$

$$c^2 - v^2 = c^2 - \left(\frac{v' + V}{1 + \left(\frac{V}{c^2} \right) v'} \right)^2 = \frac{c^2 (1 + \left(\frac{V}{c^2} \right) v')^2 - (v' + V)^2}{(1 + \left(\frac{V}{c^2} \right) v')^2} = \frac{c^4 - (v'^2 + V)^2 c^2 + V^2 v'^2}{c^2 (1 + \left(\frac{V}{c^2} \right) v')^2}$$

$$= \frac{(c^2 - v'^2)(c^2 - V^2)}{c^2 (1 + \left(\frac{V}{c^2} \right) v')^2}$$

（３－２８）が、導かれます。

v< c なら（３－２８）の左辺の値は常に正の値で、右辺の分母の値は常に正の値で分子の値も正の値に成る必要があります。よって、v'< c が成立します。

この事は光速度以下の速さをどれだけ足し合わせても光速 c の速さを超えることが出来ない事を示しています。

例えば

地上のＳ系から見て､秒速２９万ｋｍと非常に早くｘ方向に動いている宇宙船 S‘系が在り、この宇宙船から同じｘ方向にシャトルが発射されこのシャトルの宇宙船 S‘系から見た速さが秒速２９万ｋｍだった時、地上の S 系から見たシャトルの速さはいくらでしょう。

常識的に、秒速２９万ｋｍ＋秒速２９万ｋｍ＝秒速５８万ｋｍに見えると速度の足し算をしたいのですが、これは間違っています。

（３－２８）式を使って実際に確かめてみましょう。

地上の S 系から見て、宇宙船 S‘系の速さが秒速２９万ｋｍなので、v'=29 万ｋｍ/秒

シャトルの速さは宇宙船 S‘系から見て秒速２９万ｋｍなので、V=29 万ｋｍ/秒

$$c^2 - v^2 = \frac{(30^2 - 29^2)(30^2 - 29^2)}{30^2 \left(1 + \frac{29^2}{30^2} \right)^2} = \frac{59 \times 59}{900(1 + 0.934)^2} = \frac{3481}{3366} \cong 1.03$$

$$v^2 = 30^2 - 1.03 = 898.97 \qquad v \cong 29.98$$

となり、ローレンツ変換で計算したら、地上の S 系から見たシャトルの速さは秒速 29.98 万ｋｍであり光の速さ秒速３０万ｋｍを超えることは無くまた、常識的な考え方のガリレイ変換からは考えられない結果となります。

次に、（３－２８）式から V　*又は*、v'　が光速 c だった場合右辺の分子の値が 0 となり

$$c^2 - v^2 = \frac{(c^2 - v'^2)(c^2 - V^2)}{c^2 (1 + \left(\frac{V}{c^2} \right) v')^2} \qquad (c - v'^2)(c^2 - V^2) = 0$$

$$c^2 - v^2 = 0 \qquad v = c$$

全ての速さは光速 c となりどの慣性系でも光の速さは c と成るため、光速度不変の原理が確認できます。

（５）ローレンツ変換しても変わらない量

$x'=\dfrac{x-Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$　　（３－２３）　$t'=-\dfrac{-Vx/c^2+t}{\sqrt{1-\beta^2}}$　　（３－２４）式で

$\omega=ct$　$\gamma=1\big/\sqrt{1-\beta^2}$　と置くと　$(V/c)=\beta$　なので、

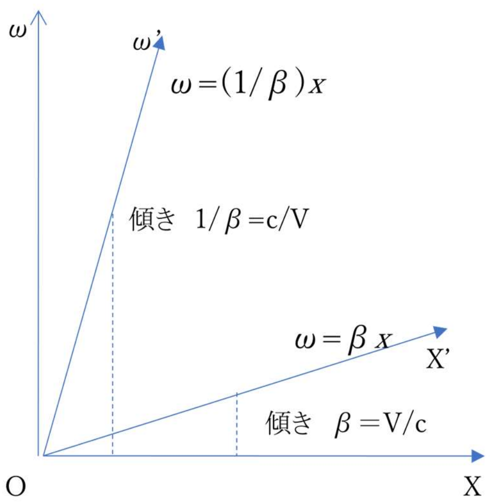
$$\begin{cases} x'=\gamma(x-\beta\,\omega) & （３－２５） \\ \omega'=\gamma(\omega-\beta\,x) & （３－２６） \end{cases}$$

となりました。

x 軸を横軸とし、ω 軸を縦軸として直交座標を描く
この時、x‘ 軸とω’ 軸はどの様に描けるか考えてみましょう。
x‘ 軸は x’ の値に対してω’ の値が常に 0 になる点を結んだ線なので
$\omega'=\gamma(\omega-\beta\,x)$　（３－２６）式の ω’の値を 0 として
$0=\gamma(\omega-\beta\,x)$　これを変形して
$\omega=\beta\,x$　この直線が x’ 軸となります。
ω‘ 軸はω’ の値に対して x’ の値が常に 0 になる点を結んだ線なので
$x'=\gamma(x-\beta\,\omega)$　（３－２５）式の x’の値を 0 として
$0=\gamma(x-\beta\,\omega)$　これを変形して

$\omega=\dfrac{1}{\beta}x$　この直線が ω’ 軸となります。

$(V/c)=\beta$　　なので、
この様な関係を（図３－２）に示しました。



*V*が 0 の時、x‘ 軸と x 軸は重なり、
ω’ 軸とω 軸も重なります。
*V*が光速 c の時、ω‘ 軸も x’ 軸も
ω＝*x*となり重なります。

V< c なので x‘ 軸の傾きは４５度
以上になることはありません。
このように、x‘ 軸とω’ 軸が直交座標
と違って直交していないのを斜交座標
と言います。

（図３－２）

（３－２５）式のｘ’　と（３－２６）式のω‘を各々２乗して引いてみると

$$x'^2=\gamma^2(x-\beta\,\omega)^2=\gamma^2(x^2-2\beta\,x\omega+\beta^2\omega^2)$$

$$\omega'^2=\gamma^2(\omega-\beta\,x)^2=\gamma^2(\beta^2x^2-2\beta x\omega+\omega^2)$$

$$x'^2-\omega'^2=\gamma^2(1-\beta^2)(x^2-\omega^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2(1-\beta^2)(x^2-\omega^2)=x^2-\omega^2 \qquad （３－２９）$$

S 系でも、S’系でも　$x'^2-\omega'^2=x^2-\omega^2$ の値は変わらない量であることが分かります。

これを、 $S^2=x'^2-\omega'^2=x^2-\omega^2=x^2-(ct)^2$　と表記します。

S^2　と言う量はローレンツ変換で不変な量として非常に大事な物になります。

ｙ軸、ｚ軸も入れて４次元の形（ｘ，ｙ，ｚ，ｔ）で書くと

$$S^2=x^2+y^2+z^2-\omega^2=x^2+y^2+z^2-(ct)^2 \qquad （３－３０）$$

この　S^2　を４次元の距離として定めた時空をミンコフスキー時空と言います。

言い換えれば、特殊相対性理論は４次元のミンコフスキー時空間で表されると言えます。

３次元のニュートン力学での空間は（ｘ，ｙ，ｚ）で、距離は

$r^2=x^2+y^2+z^2$　として定められ、これを３次元ユークリッド空間と言いました。

距離は座標系に依らず不変な量です。不変量は座標系に依らない物理的実体を表し

物理法則も座標系に依らず同じ形になることを要請している大事なものです。

４．アインシュタインの発見した不思議な世界

光速不変の原理と、全ての慣性系での物理法則は同じ形であるという２つの原理から
導かれた慣性系の間の座標変換は、ガリレイ変換ではなくローレンツ変換でした。
これを認めると、今まで私達が考えられなかった、不思議だけれども正しい自然の
姿が見えてきます。

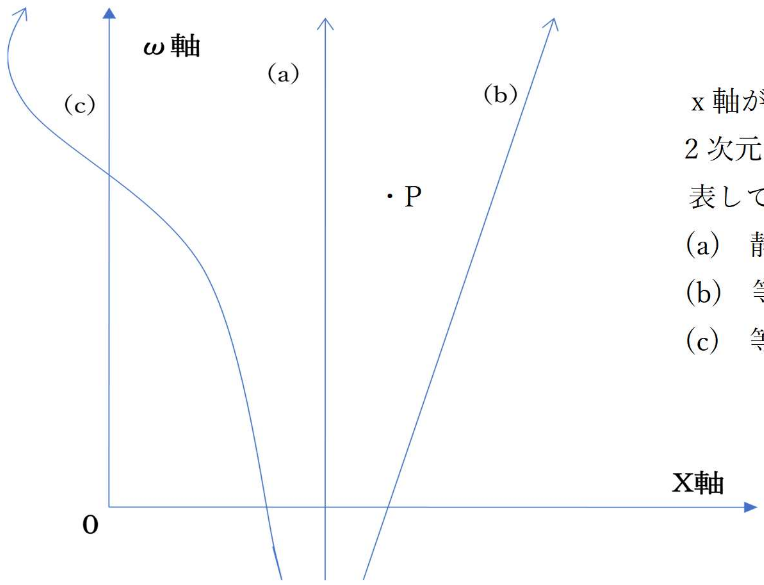
（1）世界点と世界線

空間はｘ方向だけとして、ｘ軸とω軸の２次元的なローレンツ変換として
これ以降説明します。

$$\omega=ct \quad \beta=(V/c) \quad \gamma=1\Big/\sqrt{1-\beta^2}$$

$$\begin{cases} x'=\gamma(x-\beta\,\omega) \\ \omega'=\gamma(\omega-\beta\,x) \end{cases} \;（４－１） \qquad \begin{cases} x=\gamma(x'+\beta\,\omega') \\ \omega=\gamma(\omega'+\beta\,x') \end{cases} \;（４－２）$$

（４－１）式は３章の（３－２５）と（３－２６）の式で、（４－２）式は逆変換の式です。
４章ではこの式をよく使いますので（４－１）式として最初にあげておきます。
（図４－１）に横軸がｘ軸、縦軸がω軸として２次元ミンコフスキー時空を描いています。
横方向が空間ｘ、縦方向が時間ω方向だと考えてみると



x 軸が空間方向でω軸が時間方向
2 次元でのミンコフスキー時空を
表しています。

(a)　静止している点

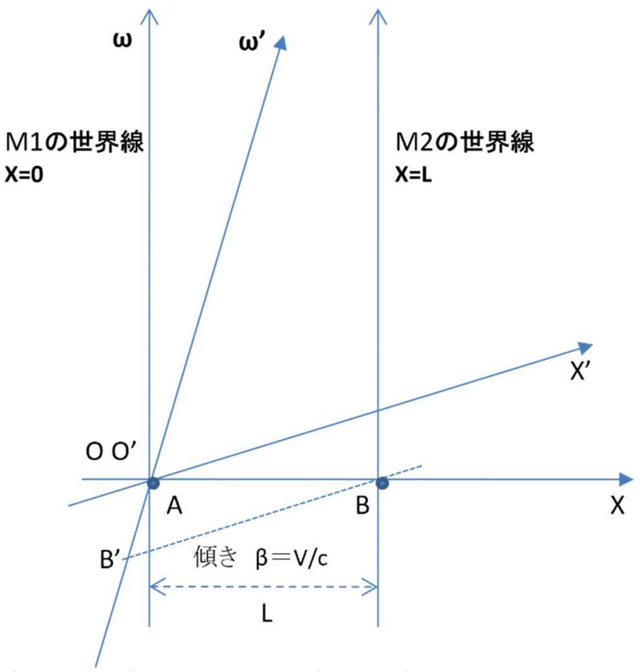
(b)　等速直線運動

(c)　等速直線でない運動

（図４－１）

（図４－１）は２次元ミンコフスキー時空を示しています。
この座標系をＳ系とします。この図の点Ｐは時刻ωと空間ｘにある点を示していて
Ｐ（ｘ，ω）と書きます。これを世界点と呼びます。時刻と共に世界点は動きます。
それをつないだ物を、世界線と呼びます。（図４－１）の(a),(b),(c)をよく見て
世界線のイメージを正しく捉えてください。

（２）同時刻の相対性



（図４－２）

（図４－２）には、Ｓ系（ｘ，ω）とそれに対して速さ V で動いている

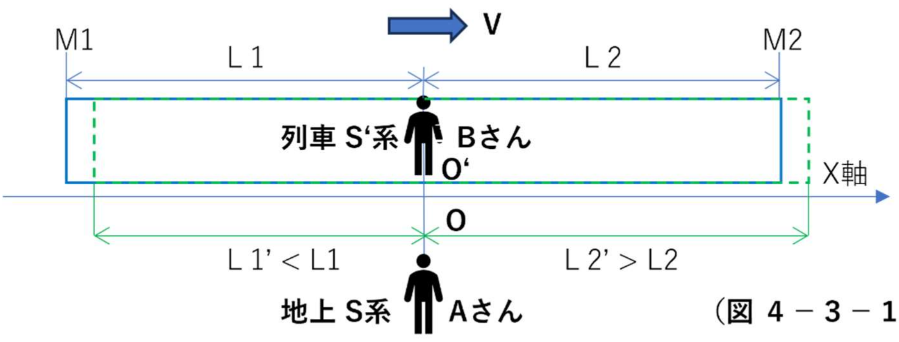
座標系 S‘系（x’ ,ω‘）を描いています。S 系で２つの質点 M1 と M2 が静止していて
M1 は x ＝ 0 にあり、M2 は x ＝L に在るとします。
M1 の世界線はω軸と同じであり、M2 はω軸に平行で x＝L を通る直線となります。
M1 の世界線がω=0（時刻０）で交わる点を世界点 A とします。
M2 の世界線がω=0（時刻０）で交わる点を世界点 B とします。
S 系で見ると世界点 A と B は共にω=0 の同時刻だと言えます。
今度は、S‘系から世界点 A と B を見ると、世界点 A の時刻はω’=0 ですが
世界点 B のω‘は世界点 B から x’軸に平行に引いた直線とω‘軸との交点 B’の値と
成ります。これは 0 ではありません。
その値は、x=L　ω=0 の値を式（４－１）の第２式に代入して得られます。
$\omega' = \gamma(\omega - \beta x) = \gamma(0 - \beta L) = -\gamma\beta L < 0$ 時刻は 0 より前と成ります。（４－３）
S 系では同時刻と見なされる事象（出来事）A と B が、S’系では同時刻とは見えず、
B の事象（出来事）が先に起こったと見なされます。
例えば S 系では世界点 A と世界点 B で起きた事象（出来事）はω=0 の同時刻で
起きていると見なすことが出来ます。
ところが、S’系では A の事象はω‘=0 の時刻で起きていますが、B の事象は（４－３）式
よりω’<0 で、A の事象より先に起こったと見られます。これを同時刻の相対性と言います。

（不思議な世界　その１）

今まで、同じ時刻に起きたことは何処にいても同じ時刻に起きているので、
時間は１つで世界は１つの時刻で表されると考えていました。
特殊相対性理論では、時刻も座標系でそれぞれ違っていると言うことになります。

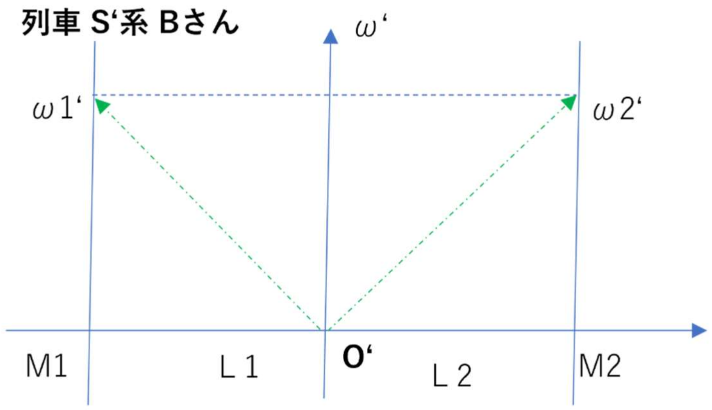
（3）同時刻の相対性に関する考察

地上にいる A さんと、その座標系を S 系とします。この S 系に対して、
X 軸の正方向に V の等速直線運動している列車の中心に B さんがいます。
この座標系を S’系とします。列車の後ろの端を M1 とし、列車の先端を M2 とします。
S 系の原点 O と S’系の原点 O’が丁度重なったときに原点 O にある光源から
光が放たれたとします。（図４－３－１）
列車内の A さんから見たら光は L1＝L2 の同じ距離を光速で走って
同時に列車の先端と列車の後ろの端に届くように見えます。
しかし、地上の B さんから見たら光は光速で走って行きますが、
列車の先端は V の速さで遠ざかっているので L2’＞L2 となり、
届く時間が余計に掛かります。一方、列車の後ろの端は V の速さで近づいて
来るので、L1’＜L1 となり、届く時間が短くなります。



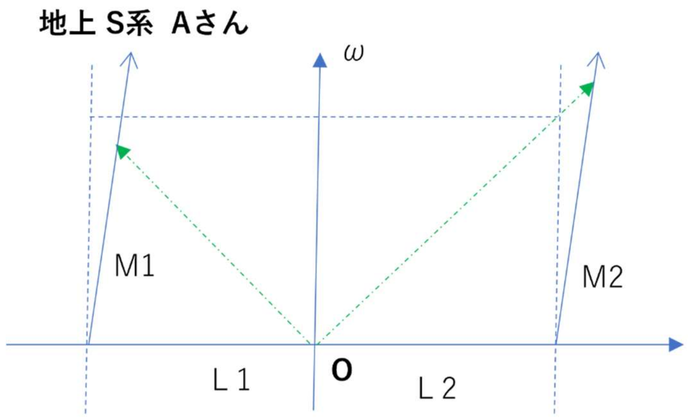
（図 4 － 3 － 1）

これを、S’系の座標で表すと、図４ － ３ － ２の様になり、同時に光が届きます。



（図 4 － 3 － 2）

しかし、S 系の座標で表すと M1 と M2 は V の速さで X 軸の正方向に動いているので
図４ － ３ － ３の様に、先ず始めに M1 に光が届き、その後 M2 に光が届く様に見えます。



（図 4 － 3 －3）

（4）時間の遅れ

時間についての、私達の常識にもアインシュタインの相対性理論は変更を迫ります。
それまでは、宇宙のどこでも時間は同じように流れていると考えていました。
しかし、動いている慣性系の間では相手の時間が遅れるという現象が起きます。
慣性系 S に対して x 軸方向に一定の速さ V で動いている慣性系 S' を考えます。
慣性系 S で、時間がt_0 から t_1 まで経過したときに慣性系 S' の
座標 x' での時間が t'_0 から t'_1 まで経過したとします。

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + \beta\,\omega') \\ \omega = \gamma(\omega' + \beta\,x') \end{cases}$$

（4－2）式の $\omega = \gamma(\omega' + \beta\,x')$ を使います。

$ct_0 = \gamma(ct'_0 + \beta x')$ 　$ct_1 = \gamma(ct'_1 + \beta x')$ 　（4－4）よって、
$ct_1 - ct_0 = \gamma(ct'_1 + \beta x') - \gamma(ct'_0 + \beta x')$ 　（4－5）両辺を c で割って

$$t_1 - t_0 = \gamma\left(t'_1 + \frac{\beta}{c}x'\right) - \gamma\left(t'_0 + \frac{\beta}{c}x'\right) = \gamma(t'_1 - t'_0) = (t'_1 - t'_0)/\sqrt{1-\beta^2}$$

（4－6）

V > 0 なので、$\sqrt{1-\beta^2} < 1$ なので、慣性系 S' の座標 x' での時間が
t'_0 から t'_1 まで経過したときの、慣性系 S での時間経過 $t_1 - t_0$ は $t'_1 - t'_0$ より
長くなります。
例えば V が秒速１５万ｋｍの場合、$\beta = 0.5$ なので $\sqrt{1-\beta^2} = 0.866$ となります。
ですから、慣性系 S' の座標 x' での時間経過が８６６秒 のとき、慣性系 S では
１０００秒 経過するので、S 系から見ると、動いている S'系の時計は１３４秒
遅れて見えることになります。

今度は、慣性系 S' から見た場合を考えると、自分は静止していて慣性系 S が
x 軸方向に一定の速さ －V で動いている様に見えます。
慣性系 S' を基準にして、慣性系 S の座標 xでの時間が t_0 から t_1 まで
経過したときの慣性系 S' での経過時間を求めてみましょう。

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta\,\omega) \\ \omega' = \gamma(\omega - \beta\,x) \end{cases}$$

（4－1）式の $\omega' = \gamma(\omega - \beta\,x)$ を使います。

$$t_1' - t_0' = \gamma\left(t_1 - \frac{\beta}{c}x\right) - \gamma\left(t_0 - \frac{\beta}{c}x\right) = \gamma(t_1 - t_0) = (t_1 - t_0)/\sqrt{1-\beta^2}$$

（４－７）

この結果、$\sqrt{1-\beta^2} < 1$ なので、慣性系 S の座標 x での時間が
t_0 から t_1 まで経過したときの、慣性系 S' での時間経過 $t_1' - t_0'$ は $t_1 - t_0$ より長くなります。
つまり、どちらから見てもお互いの時計が遅れて見えることになります。

（５）時間の遅れの実験例

宇宙から地球上に常に沢山の宇宙線という高エネルギー線が降り注いでいます。
その中で、ミューオンと呼ばれる宇宙線があり、この粒子は静止状態では、$\tau = 2\times10^{-6}$ 秒の平均寿命で電子と２個のニュートリノに崩壊します。ミューオンの速さがＶとすると
$V\times\tau$ の距離を走って崩壊すると考える事が出来ます。光速で走っても
$V\times\tau = 2\times10^{-6}\times3\times10^{8} = 600\,m$ しか走ることが出来ないことになります。
ところが、実際にミューオンは地上約６キロメートルの上空で発生し
光速の９９％ 程の速さで地上にまで到達していることが実験で検出されています。
これは、正に相対性理論による時間の遅れの効果です。
ミューオンの系では $\tau = 2\times10^{-6}$ 秒しか経っていないのに、地上の観測者から見ると
それは $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 倍経ったように見えるからです。
ミューオンは、光速に近い速さで走っています。光速の９９．８％の速さを持つ
ミューオンならば崩壊する迄に $\sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{1-(0.998)^2} \approx 0.063$
よって、$\gamma \approx 16$ となり、
$2\times10^{-6}\times3\times10^{8}\times16 \approx 9600m$
つまり、ミューオンが崩壊する迄に地上の観測者から見て９．６ｋｍ走ることが出来るので、地上まで到達できて実験で検出されたのです。

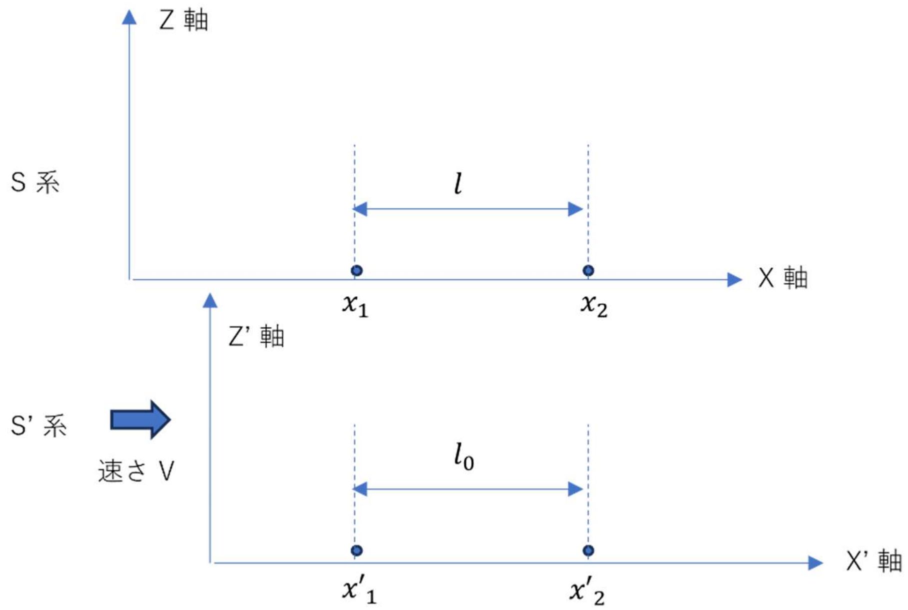
（不思議な世界　その２）

今まで、時間とは宇宙の何処でも同じ進み方をしていると思っていたのが
間違いで、座標系が違うとお互いに時計が遅れている。つまり、
時間がゆっくり進んでいるように見えるのです。
不思議なことですが、これは宇宙線の観測や他の実験で確かめられた事実です。

（６）ローレンツ収縮

物の長さについても、私達の常識にアインシュタインの相対性理論は変更を迫ります。それまでは、宇宙のどこでも測っても物体の長さは同じで変わらないものだと考えていました。しかし、動いている慣性系の間では相手の物体の長さが縮むという現象が起きます。

慣性系Ｓ に対してｘ 軸方向に一定の速さ Ｖ で動いている慣性系Ｓ’ を考えます。



（図４－４）

Ｓ’ 系のＸ’ 軸上の座標を x_1' と x_2' とし、Ｓ系で測定したそれぞれの座標を x_1 と x_2 とします。また、Ｓ’ 系で測った長さを l_0 とします。

$l_0 = x_2' - x_1'$ （４－８）です。

この、x_1' と x_2' をＳ系の時間 t に測った座標が $x_1(t)$ と $x_2(t)$ とし、その長さを $l = x_2(t) - x_1(t)$ （４－９）とします。同じ時間 t に測った値であることを明示しています。

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta\,\omega) \\ \omega' = \gamma(\omega - \beta\,x) \end{cases}$$
（４－１）式の $x' = \gamma(x - \beta\,\omega)$ を使います。

$x_1' = \gamma(x_1(t) - \beta ct)$ （４－１０）

$x_2' = \gamma(x_2(t) - \beta ct)$ （４－１１） となりますので、これを（４－８）式に代入して

$l_0 = x_2' - x_1' = \gamma(x_2(t) - \beta ct) - \gamma(x_1(t) - \beta ct) = \gamma(x_2(t) - x_1(t))$ （４－１２）

$l_0 = \gamma l = l/\sqrt{1-\beta^2}$ より、$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$ （４－１３）となります。

Ｖ＞０ なので、$\sqrt{1-\beta^2} < 1$ となり、l は l_0 より小さくなります。

つまり、S 系で S’ 系の x 方向の長さを測ると短くなることが分かります。
これを、ローレンツ収縮と呼びます。
今度は、S’ 系から S 系の x 方向の長さを測って見ましょう。
S’ 系から見ると S 系は x’ 軸方向に一定の速さ −V で動いています。

$\begin{cases} x = \gamma(x' + \beta\,\omega') \\ \omega = \gamma(\omega' + \beta\,x') \end{cases}$ （４－２）式の $x = \gamma(x' + \beta\,\omega')$ を使います。

$x_1 = \gamma(x_1'(t) + \beta ct)$ （４－１４）
$x_2 = \gamma(x_2'(t) + \beta ct)$ （４－１５） となりますので、これを（４－９）式に代入して
$l = x_2 - x_1 = \gamma(x_2'(t) + \beta ct) - \gamma(x_1'(t) + \beta ct) = \gamma(x_2'(t) - x_1'(t))$ （４－１６）
$l = \gamma\, l_0 = l_0/\sqrt{1-\beta^2}$ より、$l_0 = l\sqrt{1-\beta^2}$ （４－１７）となります。
V > 0 なので、$\sqrt{1-\beta^2} < 1$ となり、l_0 は l より小さくなります。
この結果から見ると、ローレンツ収縮も時間の遅れの時と同じようにお互いに相対的で
物体の長さが縮んでいるように観測されると言う事です。

１８８７年にマイケルソンとモーレ-という２人の科学者がエーテルの流れを
観測するために行った実験で、つじつま合わせのためにエーテルの方向に物体は
収縮すると言う説を唱えたのが、ローレンツでその時の収縮の式が
ローレンツ収縮の式として呼ばれるようになったのです。後に、
相対性理論によりこの式が導かれ物体の長さが縮むことが確かめられた
実験となりました。

（不思議な世界　その３）

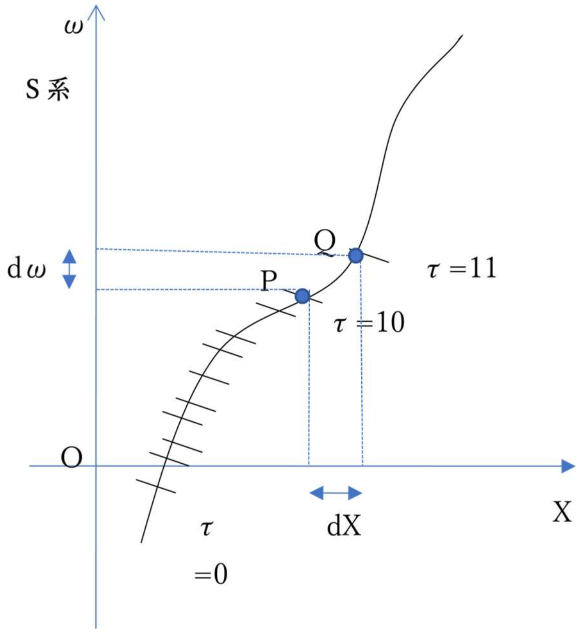
**今まで、物体の長さは物体が運動しているか静止しているかに関係なく
同じ長さだと言う事は当たり前の事だと思っていたのが
間違いで、お互いに動いている座標系の間では、お互いに物体の長さが
縮んで見える事が分かりました。
つまり、動いている物体はその方向に長さが縮んで見えるのです。
不思議ですが、マイケルソンとモーレ-の実験で確かめられた事実です。**

５．ニュートン力学の限界

ニュートン力学では、質点の位置は $x(t)$ と書かれ時間は空間と完全に切り離されて、
時間は何処でも、誰から見ても一様に過ぎていくという私達の馴染んだ考え方で
作られています。ですが、アインシュタインの相対性理論が出てからは
時間も座標系ごとに異なり絶対的ではないと言うことが
分かりました。ニュートン力学は適用の限界があると言えます。

（1）固有時

それでは、相対性理論に適応して、座標系に依らずしかも時間の意味を持つ物は在るのでしょうか？　実は、そのような量が存在し固有時と呼ばれます。



（図５－１）

左図の曲線はある質点のＳ系での世界線です。２つの世界点 P,Q の間を進んだ微小距離 dx と、その間に経った微小時間を dω とする。

S 系から別の S‘系にローレンツ変換を行っても、（３－２９）式のように

$$ds^2 = (dx)^2 - (d\omega)^2 = (dx')^2 - (d\omega')^2$$

（５－１）式

が成り立ち ds^2 は不変です。

ただ、この ds^2 は常に負の値 $(dx < d\omega)$ なので、

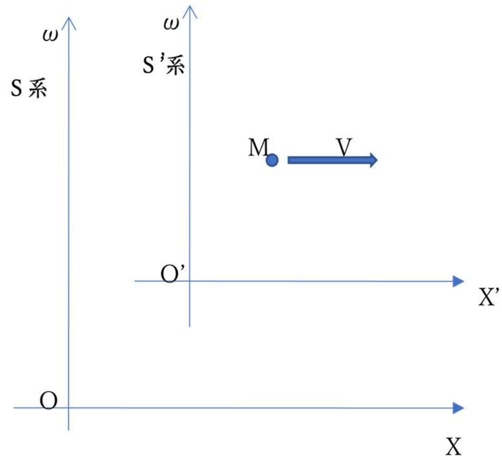
$$d\tau^2 = (d\omega)^2 - (dx)^2 = (d\omega')^2 - (dx')^2$$

（５－２）

として　$d\tau^2 = -ds^2 > 0$　$d\tau > 0$ と成るように $d\tau$ を決めます。

この　$d\tau$　はローレンツ変換による座標変換で不変の値です。（τ はタウと呼びます）

では、この $d\tau$ はどの様な量なのでしょうか？



（図５－２）

S 系で見ると質点 M が速さ V で x 方向に等速直線運動をしているとします。

この速さ V で動いている質点 M の座標系 S‘系にローレンツ変換すると、S’系では質点 M は静止しています。

つまり、質点 M に飛び乗って見るのと同じで、この時は dx’=0 なので、

（５－２）式より

$$d\tau^2 = (d\omega')^2 - (dx')^2 = (d\omega')^2$$

$d\tau > 0$ より　$d\tau = d\omega'$　（５－３）

となります。

この事から、τ はその質点と共に動いている観測者が測る時間のことだと分かります。

この様な時間 τ をこの質点の固有時と呼びます。

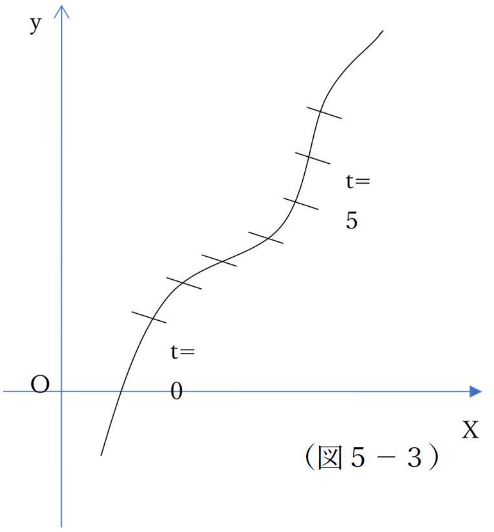
これに対して、普通の t や t’（又は、ω や ω’）は座標時と呼ばれます。

この、固有時を用いて質点の世界線上に目盛りを付けることが出来ます。

（図５－１）の $\tau=0$，$\tau=10$，$\tau=11$ などの固有時 τ で付けた目盛り参照。
この τ によるメモリを使うと、例え座標系が移ってもローレンツ不変の量なので
同じ目盛りとして使うことが出来ます。
$d\tau>0$　なので、質点の運動は τ の増大によって生じることになり。
質点のx座標は τ を変数とした関数として考えることが出来ます。
特殊相対性理論の時空間として

$$S^2=x^2+y^2+z^2-\omega^2=x^2+y^2+z^2-(ct)^2 \qquad （３－３０）$$

を４次元の距離として定めた時空をミンコフスキー時空と言います。
言い換えれば、特殊相対性理論は４次元のミンコフスキー時空間で表されると言えます。
３次元のニュートン力学での空間は（x，y，z）で、距離は
$r^2=x^2+y^2+z^2$　として定められ、これをユークリッド空間と言いました。
時間 t は別の物で、運動に関して $(x(t),y(t),z(t))$ と、位置の変化を表す
パラメータとして考えられていました。
例えば、(x,y)　平面上の２次元的な運動は（図５－３）の様に表せます。



（図５－３）

$(x(t),y(t))$
しかし、この表し方では時間 t が
他の座標系では違っていて使えないので
特殊相対性理論の時間としては使えません。
そこで、座標系によらない固有時 τ を用いて
座標系を表します。
特殊相対性理論では、時間と空間を含めた
４次元のミンコフスキー時空を考えます。
S^2 はＳ系でもＳ'系でも不変の値なので
（x，y，z，ω）を τ の関数と考え

$$S^2=x^2(\tau)+y^2(\tau)+z^2(\tau)-\omega^2(\tau)$$ と書きます。（５－４）

そして、表記の仕方を以下のように決めます。これを４元量表示と呼びます。

$$x^\mu=x^\mu(\tau)\ \ (\mu=0,1,2,3) \qquad x=x^1\ \ y=x^2\ \ z=x^3\ \ \omega=x^0 \qquad （５－５）$$

$$\begin{cases} x^0(\tau)=\omega=ct \\ x^1(\tau)=x^1=x \\ x^2(\tau)=x^2=y \\ x^3(\tau)=x^3=z \end{cases} \qquad （５－６）$$

（２）４元速度

ニュートン力学では $\vec{v}=\dfrac{d\vec{x}}{dt}$ （５－７）で速度が定義されていますが

時間 t を特別扱いしているので、特殊相対性理論の式としては適していません。

ニュートン力学　$x^i = x^i(t)$　$(i=1,2,3)$ と

特殊相対性理論　$x^\mu = x^\mu(\tau)$　$(\mu=0,1,2,3)$ を比べ、また、

４元時空での x^μ 座標は τ を変数とした関数となることから、特殊相対性理論の速度は

（５－７）式の代わりに、$u^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\tau}$ （５－８）と考えた方が適しています。

これを４元速度と言います。$x^\mu = x^\mu(\tau)$　$(\mu=0,1,2,3)$ の式を用いて

$S^2 = x^2+y^2+z^2-\omega^2$ （３－３０）の式を書き直すと、

$S^2 = -(x^0)^2+(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2$ （５－９）式となります。

ここで、$\eta_{\mu\nu}$ （η はイータ・μ はミュー・ν はニューと呼びます。）

と言う記号を使い（５－９）式を書き表します。

$\eta_{\mu\nu}$ で、μ は０，１，２，３の値を取り、ν も０，１，２，３の値を取るとします。

$\eta_{00}=-1$　$\eta_{11}=\eta_{22}=\eta_{33}=+1$　その他の $\eta_{\mu\nu}=0$　とします。

すると、（５－９）式は

$$S^2 = -(x^0)^2+(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2 = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \qquad （５－１０）$$

と書けます。一般に上付きの添え字と下付の添え字として上下に同じ文字が付いている場合は、いつでも０から３迄の和を取ると約束して Σ の記号を省略します。

（例えば、$\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ の μ と ν は $\eta_{\mu\nu}$ の場合下付の添え字ですし、

$x^\mu x^\nu$ の場合は上付きの添え字になっていますので、$\sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3}$ を省略して

$$S^2 = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$$

（５－１１）の様に書けます。

この和の記号を省略するやり方は、アインシュタインが考え出した方法で

アインシュタインの縮約規則と呼びます。これ以降この書でも縮約規則を

用いますので理解しておいてください。

なお、$\eta_{\mu\nu}$ を行列の形に書くと４×４行列の形となり、

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ （５－１２）の形に書けます。

$\eta_{\mu\nu}$ を、ミンコフスキー計量と呼び、特殊相対性理論の４次元時空は距離を
$S^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$ （５－１１）で定義されたミンコフスキー時空で表現されます。

$u^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\tau}$ （５－８）の４元速度については、

$$\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}{(d\tau)^2} = \frac{-(d\tau)^2}{(d\tau)^2} = -1$$

（５－１２）が成り立ちます。

この事から、u^μ の４つの成分は全部が独立ではないと言う事が分かります。

$d\tau^2 = (d\omega)^2 - (dx)^2$ （５－２）式の両辺を $(d\omega)^2$ で割ると

$\left(\dfrac{d\tau}{d\omega}\right)^2 = 1 - \left(\dfrac{dx}{d\omega}\right)^2$ （５－１３）と成ります。ここで、$d\omega = cdt$ なので

$\dfrac{dx}{d\omega} = \dfrac{1}{c}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{v}{c} = \beta$ これを（５－１３）式に代入して

$\dfrac{d\tau}{d\omega} = \sqrt{1-\beta^2}$ より、 $d\tau = \sqrt{1-\beta^2}\, d\omega = \dfrac{1}{\gamma} d\omega$ （５－１４）を得ます。従って

$$\begin{cases} u^1 = \dfrac{dx}{d\tau} = \gamma \dfrac{dx}{d\omega} = \dfrac{1}{c}\gamma v \\ u^0 = \dfrac{d\omega}{d\tau} = \gamma \dfrac{d\omega}{d\omega} = \gamma \end{cases}$$

（５－１５）となり、４元速度が求まります。

この u^1 は $(x$, y , z) の３次元に一般化して

$\vec{u} = \dfrac{1}{c}\gamma\vec{v} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ （５－１６）と書くことが出来ます。

u^μ の空間成分 $(u^1, u^2, u^3) = \vec{u}$ は、普通の意味の速度を特殊相対性理論に適応させた物だと言えます。（v が光速 c より非常に小さいときには
$c\vec{u} \cong \vec{v}$ となるからです。）しかし、u^0 はどの様な量なのか未だ良く分かりません。
そのために、運動量を特殊相対性理論に適応させます。

（４） ４元運動量

ニュートン力学では運動量は

$\vec{p} = m\vec{v}$ （５－１７）で定義されています。

u^μ の空間成分 $\vec{u}$ を用いて、 $\vec{p} = mc\vec{u} = mc\dfrac{1}{c}\gamma\vec{v} = m\gamma\vec{v}$ （５－１８）

とすると、$v \ll$ c で v が光速に比べて非常に遅い場合 $\gamma \to 1$ に近づくので

$\vec{p} = m\vec{v}$　（５－１７）が成り立ちます。
ここで、$p^0 = mcu^0 = mc\gamma$　（５－１９）と書くことにすると、
（５－１８）式と（５－１９）式により　$p^\mu = mcu^\mu$　（５－２０）と成ります。
u^μ は４元ベクトルだったので、質量 m がスカラーだとして
p^μ も４元ベクトルになります。ですから、p^μ は座標と同じローレンツ変換を受け
S 系に対して、速さ v で x 方向に動いている座標系 S'系から見ると

$$\begin{cases} p'^1 = \gamma(p^1 - \beta p^0) \\ p'^0 = \gamma(-\beta p^1 + p^0) \end{cases} \qquad (5-21)$$

となります。（３－２５）式で、$x = p^1$ $\omega = p^0$ $x' = p'^1$ $\omega' = p'^0$ に変えただけです。
この $p^\mu = mcu^\mu$ を４元運動量と呼びます。

（５）特殊相対性理論的なエネルギー

４元ベクトル x^μ のローレンツ変換での不変な量は $s^2 = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$　（３－１５）
で与えられました。同じ様に、４元運動量p^μ も４元ベクトルなので
$\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$　（５－２２）　もローレンツ変換での不変な量になります。
$p^\mu = mcu^\mu$（５－２０）を代入して
$\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = (mc)^2\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$　ここで、$\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$　（５－１２）式より、

$$\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = -(p^0)^2 + (\vec{p})^2 = (mc)^2(-1) = -m^2c^2 \qquad (\vec{p})^2 = (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 \qquad (5-23)$$

となります。

$-(p^0)^2 + (\vec{p})^2 = -m^2c^2$　これを p^0 について解くと、
$p^0 = \pm\sqrt{(\vec{p})^2 + m^2c^2}$　（５－２４）となり、p^0 を正の値とすると
$p^0 = \sqrt{(\vec{p})^2 + m^2c^2}$　（５－２５）となります。

$\vec{p} << mc$　（４元運動量の空間成分の大きさが mc に比べて非常に小さい時）
（５－２５）式はテイラー展開して $\vec{p}$ の２次迄の項で近似できます。

$$p^0 = \sqrt{(\vec{p})^2 + m^2c^2} = mc\left(1 + \frac{1}{2}\frac{(\vec{p})^2}{m^2c^2} + \cdots\right) \cong \frac{1}{c}\left(mc^2 + \frac{(\vec{p})^2}{2m}\right) \qquad (5-26)$$

この式の第２項目はニュートン力学では運動エネルギー　$K = (\vec{p})^2/2m$　として
表される事から、p^0 は特殊相対性理論的な運動エネルギーと考えることが出来ます。

$$p^0 = \sqrt{(\vec{p})^2 + m^2c^2} = mc\left(1 + \frac{1}{2}\frac{(\vec{p})^2}{m^2c^2} + \cdots\right) = \frac{1}{c}\left(mc^2 + K\right) \qquad (5-27)$$

$E = mc^2 + K$　（５－２８）と置くと、$p^0 = \dfrac{E}{c}$　（５－２９）となります。

u^μ が０の時は $\vec{p} = mc\vec{u}$ なので、 $\vec{p}$ も０になり、動いていない静止した状態です。
この時

$$p^0 = \sqrt{(\vec{p})^2 + m^2c^2} = \sqrt{0 + m^2c^2} = mc = \frac{E}{c}$$ より、

$E = mc^2$　（５－３０）式が導かれます。

質量 m の質点は静止していても $E = mc^2$ のエネルギーを持っていると言っています。
これを、静止エネルギーと呼び、アインシュタインの公式として有名です。

（不思議な世界　その３）

今まで、質量とエネルギーは全く関係がないものだと思われていました。
質量は例え複数に分裂しても、１つにまとまっても常にその合計は一致していて
質量がなくなるなどと言う事は考えられなかったのですが、アインシュタインは
特殊相対性理論の結果として、質量は静止しているときでもエネルギーを持っていると
言う事を発見しました。質量とエネルギーは置き換わることが出来ると言う事です。
この置き換えは $E = mc^2$ の式で計算することが出来ます。
１グラムの質量がエネルギーに変わったとしたら

$$E = mc^2 = 10^{-3}kg \times (3 \times 10^8)^2 m^2/s^2 = 9 \times 10^{13} J$$

$$\cong (9 \times 10^{13}) \div (4.2 \times 10^3) kcal \cong 2 \times 10^{10} kcal$$

１０リットル容器２０００万本に入っている水を沸騰させる事が出来るくらいの
とてつもなく大きいエネルギーが発生します。原子爆弾はこの質量がエネルギーに
変わるのを使った、恐ろしい破壊を起こす兵器です。
逆に、大きなエネルギーにより、質量を持つ粒子を発生させることが出来ます。
宇宙から地球上に常に沢山の宇宙線という高エネルギー線が降り注いでいます。
これにより、エネルギーから粒子が発生したり、粒子が消滅してエネルギーが発生したり
しています。人工で粒子を高エネルギーで衝突させ、同じように粒子の消滅や
エネルギーによる粒子生成が現実に行われています。

６．ニュートン力学に代わる特殊相対性理論的な運動の法則

（1）相対論的運動方程式

ニュートン力学での運動方程式は $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$　（６－１）で与えられます。

これは、時間 t を特別扱いしているので、ローレンツ変換での不変な式になっていません
相対論的運動方程式はローレンツ変換で式の形が変わらないことが必要です。
そこで、座標系の取り方に依らない固有時と４元運動量を相対論的運動方程式の
時間と運動量として考えます。

$\dfrac{dp^{\mu}}{d\tau}=f^{\mu}\ (\mu=0,1,2,3)$　　（６－２）を相対論的運動方程式と定義します。

この式の左辺は４元ベクトルなので、右辺の　f^{μ}　も４元ベクトルとなり、

ローレンツ変換を行っても $\dfrac{dp'^{\mu}}{d\tau}=f'^{\mu}\ (\mu=0,1,2,3)$　（６－３）で式の形は不変です。

これを、方程式（６－２）はローレンツ変換に対して共変だと言います。
（６－２）式の空間的な成分 μ ＝（１，２，３）は

$d\tau=\dfrac{1}{\gamma}d\omega$　（５－１４）式を使って $\dfrac{d\vec{p}}{d\tau}=\gamma\dfrac{d\vec{p}}{d\omega}=\gamma\dfrac{d\vec{p}}{d(ct)}=\vec{f}$　（６－４）となります。

これを変形して、$\dfrac{d\vec{p}}{dt}=\dfrac{c}{\gamma}\vec{f}$　（６－５）となり、$v<<c$ の時、$\dfrac{c}{\gamma}=\dfrac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}\cong c$

$\dfrac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}=\dfrac{c}{\gamma}\vec{f}\cong c\vec{f}$　（６－６）式が成り立ち、空間的な成分は $v<<c$ の時に

ニュートン力学の運動方程式を再現することが分かります。
それでは、f^0 は何を表しているのでしょう。（６－２）式より

$\dfrac{dp^0}{d\tau}=f^0$　（６－７）です。ここに、（５－２９）式の　$p^0=\dfrac{E}{c}$ を代入して、

$\dfrac{dp^0}{d\tau}=f^0=\dfrac{1}{c}\dfrac{dE}{d\tau}$　（６－８）ここで、$d\tau=\sqrt{1-\beta^2}d\omega=\dfrac{1}{\gamma}d\omega$（５－１４）より

$f^0=\dfrac{1}{c}\dfrac{dE}{d\tau}=\dfrac{\gamma}{c^2}\dfrac{dE}{dt}$　（６－９）が導かれます。これを見ると、f^0　はエネルギーの
時間変化の割合（仕事率）だと分かります。

（２）速さと質量の変化

４元運動量の u^{μ} の空間成分は $\vec{u}$ を用いて、

$\vec{p}=mc\vec{u}=mc\dfrac{1}{c}\gamma\vec{v}=m\gamma\vec{v}$　（５－１８）と書けます。$(\vec{v})^2=v^2$ を使うと

$(\vec{p})^2=(mc\vec{u})^2=\left(mc\dfrac{1}{c}\gamma\vec{v}\right)^2=m^2\gamma^2\vec{v}^2=\dfrac{m^2v^2}{1-\beta^2}=\dfrac{m^2v^2c^2}{c^2-v^2}$　となり

$$p^2(c^2 - v^2) = m^2 v^2 c^2 \qquad p^2 c^2 = (p^2 + m^2 c^2) v^2$$

$$v^2 = \frac{c^2 p^2}{m^2 c^2 + p^2} = \frac{c^2}{\left(1 + m^2 \dfrac{c^2}{p^2}\right)} < c^2$$

（６－１０）となります。

$\vec{v}$の大きさは、常に光速　c　より小さくて、$p^2 \to \infty$　で初めて光速　c　になります。
つまり、質量を持つ物体の速さは光速を超えられないと言う事が分かります。
ここで、（５－１８）式の　$\vec{p} = m\gamma\vec{v}$　を書き換えて

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v} = m\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\vec{v} = m(v)\vec{v}$$

（６－１１）とします。$m(v)$ を換算質量とすると
換算質量は速さによって変化する物と
考えることが出来ます。

光速に近づくとこの換算質量 $m(v)$ は無限大に近づくので、どんなにエネルギーを追加しても速さは増えなくなり光速を越えることは出来ないことが分かります。
（６－１０）式で　$m = 0$　の時は、$\vec{v}$の大きさは、光速　c となりますので、
光子など、質量ゼロの粒子は必ず光速で走っていると言えます。
しかし、質量は０でも運動量とエネルギーは持っていて、

$p^0 = \sqrt{(\vec{p})^2 + m^2 c^2}$　（５－２５）と　$p^0 = \dfrac{E}{c}$　（５－２７）から$m = 0$ を代入して

エネルギーは　$E = c|\vec{p}|$　（６－１３）を持つこととなります。
光子のエネルギーはこの様にして求まります。

（不思議な世界　その４）

今まで、速さはエネルギーを与えると物体をいくらでも速い速度に増やす事が出来ると考えられていました。でも、質量を持つ物体の速さは光の速さを超えることが出来ない事が分かりました。これも、アインシュタインの特殊相対性理論で分かった不思議なことです。また、質量がゼロの粒子は逆に光速でしか走れないと言う事も分かりました。質量がゼロなのに、運動量とエネルギーは持っています。
あと、今まで、物体の質量は速さとは関係ないもので速くなっても質量は一定だと思われていました。所が、速さが速くなると質量が増え、光速に近づくと換算質量が無限大に大きくなってしまう事も、不思議なことです。
質量がゼロの粒子は考えにくいと思いますが、実は身近にいつも感じている光は質量がゼロなので、光速で走っています。光はマックスウェル方程式から電磁波という波であることが導かれましたが、量子論という新しい理論では光も粒子として考えられることが示されました。光が粒子と言うよりも量子という

エネルギーがとびとびの存在として示されると言うのが量子論で分かったことです。
これは、不思議の国のトムキンスツアーのシーズン３　量子の不思議で
紹介できればと思っています。

参考文献

セミナーテキストを作るに当たりまして、諸先生方の著作を参考にさせて頂きました。

① 佐賀大学講義テキスト「特殊相対性理論」　船久保 公一　著
② 「時空と重力」　　藤井 保憲　著
③ 「力学が分かる」　表 實　著
④ 「高校数学でわかる相対性理論」　竹内 淳　著